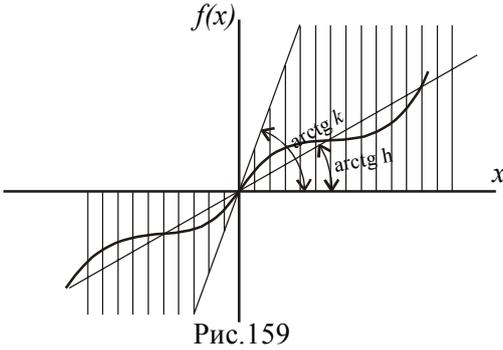


Связь критерия Попова с критерием Найквиста



Если для нелинейности, лежащей в секторе $(0; k)$ произведем линейризацию в виде $y = hx$ (рис.159), то введя такое звено в частотную характеристику Попова, получим точный аналог критерия Найквиста. Только критической точкой, которую не должна охватывать частотная характеристика Попова будет точка с координатами $(-\frac{1}{h}; j0)$.

Приближенные методы исследования нелинейных систем

1. Метод гармонической линейризации (гармонического баланса, описывающих функций, малого параметра)

Наиболее широкое применение для исследования нелинейных САУ, порядок которых выше второго ($n > 2$), получил приближенный метод гармонической линейризации основанный на частотных методах (как в линейных системах).

Метод гармонического баланса был развит Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым в 1934 году для механических систем. Применительно к САУ этот метод разработан Л.С.Гольдфарбом, Е.П.Поповым и др в 1940 году.

Основная идея метода сводится к следующему:

Пусть замкнутая нелинейная система состоит из последовательно включенных нелинейного звена (НЗ) и устойчивой или нейтральной линейной части (ЛЧ) (рис.160).

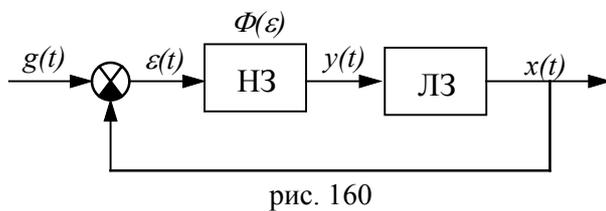


рис. 160

К такой структуре сводятся большинство нелинейных систем, включающих в себя один нелинейный элемент.

Полагаем, что в системе существуют автоколебания, амплитуду и частоту которых необходимо определить.

Полагая $g(t) = 0$, будем искать выходную

величину системы (входная величина нелинейности) в виде:

$$x = A \cdot \sin \omega t, \quad (1)$$

где A – амплитуда автоколебаний;
 ω – частота автоколебаний.

Отметим, что в действительности автоколебания в нелинейных системах всегда несинусоидальны, т.к. их форма искажается нелинейным звеном. Поэтому область применения метода ограничивается теми системами, где автоколебания на выходе нелинейного звена достаточно близки (1). Для того, чтобы это условие выполнялось, линейная часть системы должна практически являться фильтром низких частот и не пропускать высшие гармоники автоколебаний.

Действительно, если амплитудно-частотная характеристика ЛЧ системы имеет вид (рис.161).

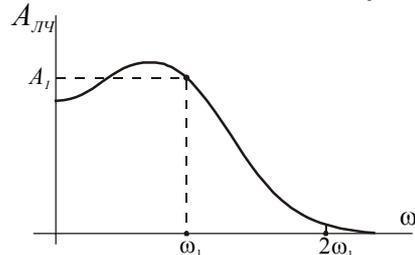
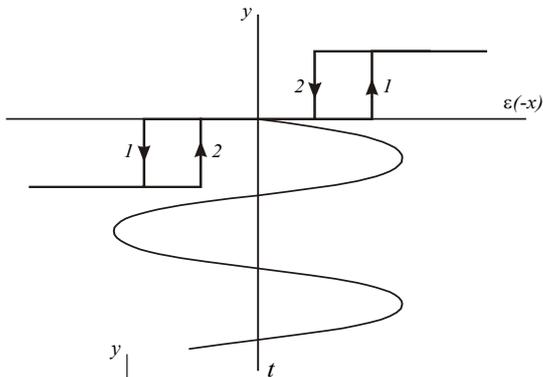


Рис.161

Если частота автоколебаний равна ω_1 , то как видно из рисунка, ЛЧ является фильтром НЧ, т.к. уже вторая гармоника частоты $2\omega_1$ практически не проходит на вход НЗ.

Последнее предположение носит название гипотезы фильтра и выполнение этой гипотезы является необходимым условием гармонической линейризации.

Допустим, для определенности, что НЗ – есть реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (рис.162).



$y = \Phi(x, px)$, такая запись нелинейной функции показывает, что при $px = \frac{dx}{dt} > 0$ y изменяется по линии 1.

Если на входе нелинейности имеем гармоническую функцию вида (1) (рис.162), то на выходе получим сигнал $y = \Phi(A \sin \omega t, A \omega \cos \omega t)$, (2) представляющий собой прямоугольные импульсы (рис.163).

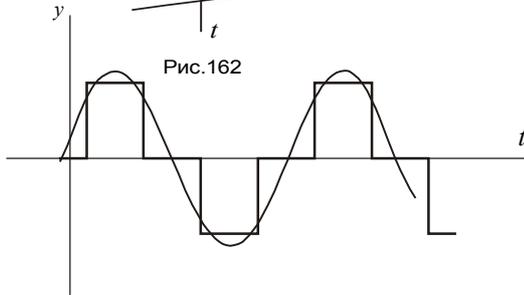


Рис.163

Разложим уравнение (2) в ряд Фурье. Так как линейная часть системы пропускает только основную гармонику, то и ограничиваемся первыми членами ряда Фурье:

$$y = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (3)$$

$$\text{где } a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t, A \omega \cos \omega t) \sin \omega t d\omega t,$$

$$b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t, A \omega \cos \omega t) \cos \omega t d\omega t \quad -$$

соответствующие коэффициенты ряда Фурье для периодической функции без постоянной составляющей.

Из выражения (1)

$$\sin \omega t = \frac{x}{A}. \quad (4)$$

Дифференцируя (1) $px = A \omega \cos \omega t$, получим

$$\cos \omega t = \frac{1}{A \omega} px. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (3), получим

$$y = \frac{a}{A} x + \frac{b}{A \omega} px = q(A)x + q'(A)px, \quad (6)$$

где $q(A) = \frac{a}{A}$; $q'(A) = \frac{b}{A \omega}$ – гармонические коэффициенты усиления нелинейного звена.

Отметим, что:

1. Для однозначных нелинейных характеристик $q'(A) = 0$ и уравнение (6) принимает вид:

$$y = q(A)x; \quad (7)$$

2. Для петлевых характеристик гистерезисного типа величина $q'(A)$ всегда отрицательна, что эквивалентно запаздыванию при работе этого НЗ.

Физический смысл гармонической линейаризации [уравнение (6) и (7)] заключается в том, что нелинейное уравнение (2), ограничиваясь первой гармоникой на выходе НЗ при гармоническом сигнале на входе можно заменить уравнениями (6) или (7). Графически однозначные нелинейные зависимости $y = \Phi(x)$ заменяются прямыми линиями с углом наклона, пропорциональным амплитуде входного сигнала A (рис.164).

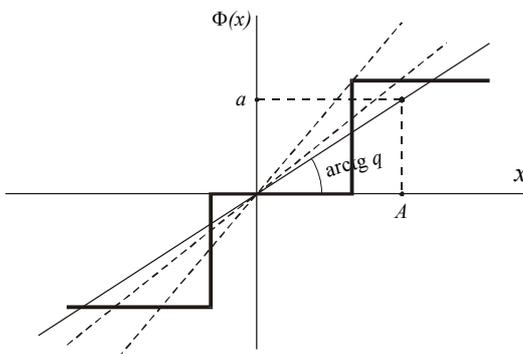


Рис.164

В результате гармонической линейаризации получаем не чисто линейное звено (как после линейаризации при методе малых отклонений), а своеобразное линейное звено, коэффициент усиления которого в общем случае зависит от амплитуды A и частоты ω входного сигнала. Для однозначных характеристик НЗ коэффициент усиления зависит от амплитуды A входного сигнала.

Передаточная функция гармонически линейаризованного

звена тогда может быть определена как

$$W_H = \frac{y(p)}{x(p)} = q(A) + q'(A). \quad (8)$$

Если передаточная функция линейной части системы $W_L(p)$, то передаточная функция всей системы в разомкнутом состоянии по правилам линейной теории имеет выражение

$$W_p(p, A) = W_L(p)W_H(A), \quad (9)$$

а характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы на основании (9) можно записать

$$1 + W_p(p, A) = 1 + W_L(p)W_H(A) = 0. \quad (10)$$

По уравнению (10), подставляя в него $p = j\omega$, можно определить параметры автоколебаний A_0 и ω_0 .

Подставим в (9) $p = j\omega$ и запишем его в виде комплексного числа

$$U(A, \omega) + jV(\omega, A) = 0. \quad (11)$$

Комплексное число равно нулю, когда и вещественная и мнимая части равны нулю.

Из (11) получим систему

$$\left. \begin{aligned} U(A, \omega) &= 0, \\ V(A, \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решая (12) находим параметры автоколебаний (если они существуют): амплитуду A_0 и частоту ω_0 .

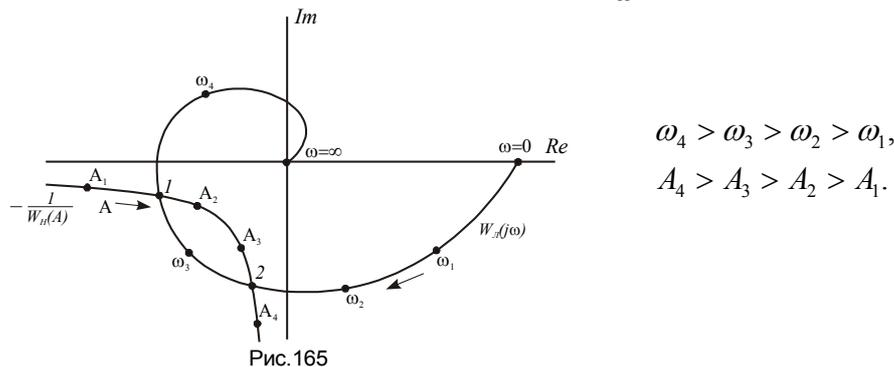
По уравнению (10) можно, применяя любой из известных методов линейной теории, исследовать устойчивость автоколебаний нелинейной системы. Наиболее широкое распространение в ТАУ имеют методы Л.С.Гольдфарба и Е.П.Попова.

Критерий Гольдфарба

Л.С.Гольдфарб предложил графическое решение характеристического уравнения гармонически линеаризованной нелинейной системы частотными методами.

Подставляя в (10) $p = j\omega$, перепишем его (рис.165)

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(A)}. \quad (13)$$



$$\begin{aligned} \omega_4 &> \omega_3 > \omega_2 > \omega_1, \\ A_4 &> A_3 > A_2 > A_1. \end{aligned}$$

При этом возможно:

1. Кривые $W_L(j\omega)$ и $-\frac{1}{W_H(A)}$ не пересекаются – автоколебания в системе не возможны.
2. Кривые $W_L(j\omega)$ и $-\frac{1}{W_H(A)}$ касаются, – параметры системы имеют критические (бифуркационные) значения.
3. Кривые $W_L(j\omega)$ и $-\frac{1}{W_H(A)}$ пересекаются, – точки пересечения соответствуют автоколебаниям, параметры которых A_0 и частоту ω_0 , определяются непосредственно из графика. Однако автоколебания будут иметь место в реальной системе, если они устойчивы.

Определение: Если частотная характеристика линейной части системы $W_L(j\omega)$ с ростом ω охватывает точку пересечения $W_L(j\omega)$ и $-\frac{1}{W_H(A)}$ с отрицательным приращением амплитуды характеристики $-\frac{1}{W_H(A)}$ и не охватывает с положительным приращением, то найденные автоколебания будут устойчивыми.

В нашем примере (рис.165) в точке 2 будут устойчивые автоколебания – по кривой $W_L(j\omega)$ определяется ω_0 , а по кривой $-\frac{1}{W_H(A)}$ определяется A_0 .

Следовательно на входе нелинейного звена (выход системы) имеем устойчивые автоколебания в виде

$$x = A_0 \sin \omega_0 t. \quad (14)$$

Выходную координату (y) нелинейного звена легко построить графически по виду нелинейной характеристики $y = \Phi(x)$.

Критерий Гольдфарба нельзя применять, когда под знаком нелинейной функции имеется две или более переменных, во первых, и во-вторых, когда несколько нелинейных элементов нельзя заменить одним эквивалентным нелинейным звеном.

Определение устойчивости автоколебаний по алгебраическим критериям (метод Е.П.Попова)

Алгебраические критерии используются в тех случаях, когда аналитически или графически удастся решить систему уравнений (12), т.е. определить A_0 и ω_0 .

После этого задавая амплитудой $A_1 = A_0 + \Delta A$, где ΔA – малое приращение амплитуды, по характеристическому уравнению гармонически линеаризованной нелинейной системы (10) проверяется устойчивость по любому известному критерию на устойчивость.

При этом возможно:

1. Система неустойчива – следовательно амплитуда сигнала возрастает $A > A_1$.
2. Система устойчива – следовательно амплитуда сигнала уменьшается $A < A_1 \rightarrow A_0$.

Задаем $A_2 = A_0 - \Delta A$, тогда:

1. система устойчива, следовательно амплитуда сигнала уменьшается $A < A_2 \rightarrow 0$.
2. система неустойчива, следовательно амплитуда сигнала возрастает $A > A_2 \rightarrow A_0$.

Таким образом, если при A_1 система устойчива, а при A_2 система неустойчива, то автоколебания в системе с A_0, ω_0 устойчивы (рис.166).

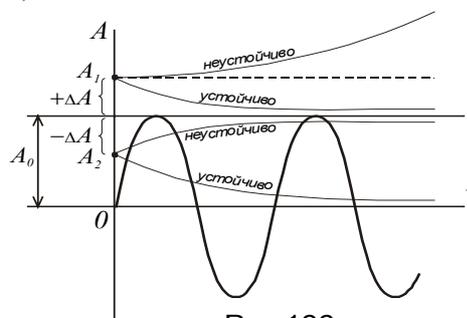


Рис.166

Пример нахождения автоколебания релейной САУ

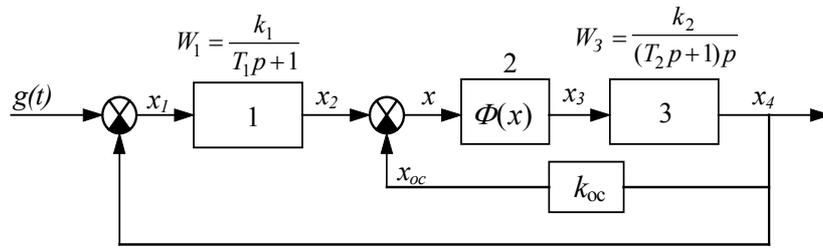


рис. 167

При $g(t) = 0$, $x_1 = -x_4$, тогда из рис.167:

$$\left. \begin{aligned} \text{, \%oH''1: } (T_1 p + 1)x_2 &= -k_4 x_4, \\ \text{, \%oH''2: } x_3 &= \Phi(x), \\ x &= x_2 - k_{oc} x_4, \\ \text{, \%oH''3: } (T_2 p + 1)p x_4 &= k_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ищем решение системы относительно входной координаты нелинейного звена x в виде (рис.168)
 $x = A \sin \omega t$, (2)

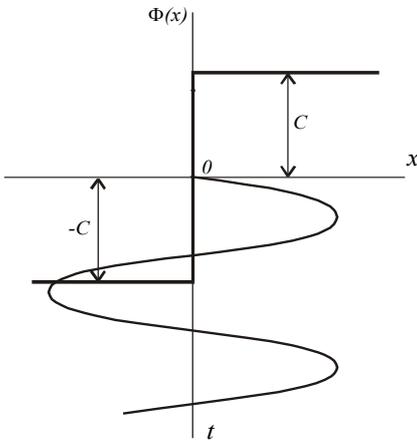


Рис.168

тогда на выходе нелинейного элемента будем иметь периодическую прямоугольную функцию (рис.169).

Разложим эту функцию в ряд Фурье, тогда получим

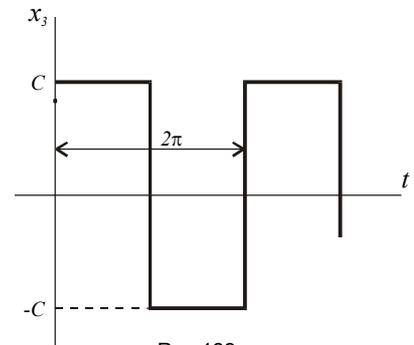


Рис.169

$$x_3 = \Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin(i\omega t + \beta_i), \quad (3)$$

где B_i и β_i амплитуда и фаза i -й гармоники.

Отметим, т.к. $\Phi(x)$ – нечетна и однозначна, то гармоники i – нечетны ($i = 1, 3, 5, \dots$).

Сигнал (3), проходя через линейное звено 3, получает вид

$$x_4 = \sum_{i=1}^{\infty} |W_{3i}| B_i \sin(i\omega t + \beta_i + \varphi_i), \quad (4)$$

где $|W_{3i}| = \left| \frac{k_2}{p(T_2 p + 1)} \right|_{p=j\omega} = \frac{k_2}{i\omega \sqrt{T_2^2 i^2 \omega^2 + 1}}$;

$$\varphi_i = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} T_2 i \omega.$$

Из формулы (4) видно, что амплитуды гармоник выше первой не пропускаются линейным звеном 3, т.е. линейное звено 3 является фильтром НЧ. Поэтому координату x_4 можно считать практически близкой к синусоиде, частота которой равна частоте 1-й гармоники

$$x_4 \approx |W_{31}| B_1 \sin(\omega t + \beta_1 + \varphi_1). \quad (5)$$

следовательно, координаты x_2 и x из уравнений (1) тоже будут близки к синусоиде.

Таким образом, берется только первая гармоника выражения (3)

$$x_3 = \Phi(x) \approx B_1 \sin \omega t, \quad (6)$$

($\beta_1 = 0$, т.к. $\Phi(x)$ – нечетна и однозначна),

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C \sin \omega t d\omega t + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-C) \sin \omega t d\omega t = \frac{4C}{\pi}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Гармонический коэффициент линеаризации тогда, учитывая (2), (6) и (7)

$$q(A) = \frac{x_3}{x} = \frac{\frac{4C}{\pi} \sin \omega t}{A \sin \omega t} = \frac{4C}{\pi A}.
 \tag{8}$$

Уравнение нелинейного звена после гармонической линеаризации

$$x_3 = q(A)x.
 \tag{9}$$

Решая систему уравнений (1) с учетом (9) вместо $x_3 = \Phi(x)$ относительно координаты x , получим

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) p + (k_1 + k_{oc}) q k_2 = 0.
 \tag{10}$$

Подставляя в (10) $p = j\omega$, разбиваем его на действительную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned}
 (k_1 + k_{oc}) k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2 &= 0, \\
 (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) \omega - T_1 T_2 \omega^3 &= 0.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{11}$$

Из 1-го уравнения (11), учитывая (8) найдем ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{4C(k_1 + k_{oc})k_2}{\pi A(T_1 + T_2)}.
 \tag{12}$$

Из 2-го уравнения (11) с учетом (12) и (8) получаем

$$A_0 = \frac{4Ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}{\pi(T_1 + T_2)},
 \tag{13}$$

тогда ω^2 с учетом (13)

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_{oc}}{T_1 (T_2 k_1 - T_2 k_{oc})}.
 \tag{14}$$

Далее проверяется устойчивость полученных автоколебаний.

2. Графо-аналитические методы построения переходных процессов

1. Численно-графический метод Д.А.Башкирова (1948 г.)

Этот метод является наиболее универсальным, так как он может быть применен как для построения кривых переходного процесса, так и кривых процесса регулирования или слежения при любых возмущающих воздействиях. Его можно применить: к линейным системам, к линейным системам с запаздыванием, к нелинейным системам с любым видом нелинейной характеристики.

Исходные положения метода: Допустим, имеем кривую переходного процесса $x = f(t)$ в виде экспоненты (рис.170)

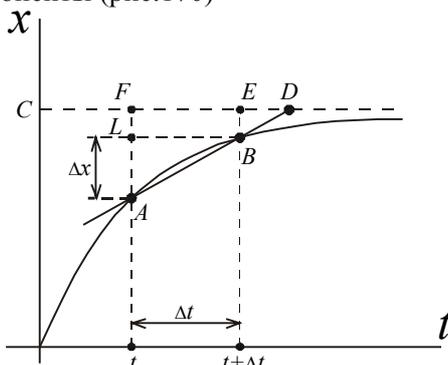


Рис.170

$$x = C - C_1 e^{-\frac{t}{T}},
 \tag{1}$$

где T — постоянная времени переходного процесса;

C_1 — постоянная, зависящая от начальных условий.

Докажем, что проекция секущей $FD = T_c$, проведенной через любые две точки экспоненты равноотстоящие друг от друга по времени Δt является постоянной.

Возьмем две произвольные точки на экспоненте A и B через момент времени Δt , причем A соответствует произвольному моменту времени t . Проведем секущую и найдем длину её проекции FD .

Так как треугольник BED подобен треугольнику AFD , а треугольник ALB – треугольнику AFD , то можно записать, что

$$\frac{ED}{FD} = \frac{BE}{AF}, \quad (2)$$

$$\frac{AL}{AF} = \frac{BL}{DF}. \quad (3)$$

Из графика

$$AF = C - x(t) = C - C + C_1 e^{-\frac{t}{T}} = C_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (4)$$

$$BE = C - x(t + \Delta t) = C_1 e^{-\frac{t+\Delta t}{T}}, \quad (5)$$

$$ED = FD - FE = FD - \Delta t. \quad (6)$$

Подставляя (4), (5) и (6) в выражение (2), получим:

$$\frac{T_c - \Delta t}{T_c} = \frac{C_1 e^{-\frac{t+\Delta t}{T}}}{C_1 e^{-\frac{t}{T}}},$$

$$T_c - \Delta t = T_c e^{-\frac{\Delta t}{T}}; \quad T_c (1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}) = \Delta t,$$

$$T_c = \frac{\Delta t}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}}. \quad (7)$$

Из выражения секущей T_c (7) видно, что её длина не зависит от времени t . Кроме того выражение (7) для любой заданной экспоненты связывает между собой длину проекции секущей T_c с постоянной времени T .

Если знаменатель выражения (7) разложить в ряд Тейлора и ограничиться только линейными членами ряда, то получим такую зависимость

$$T_c \approx T + \frac{\Delta t}{2}. \quad (8)$$

Подставляя в формулу (2)

$$AL = \Delta x,$$

$$AF = C - x(t),$$

$$BL = \Delta t,$$

$$DF = T_c = T + \frac{\Delta t}{2},$$

получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{C - x(t)}{T + \frac{\Delta t}{2}}. \quad (9)$$

Уравнение (9) является исходным при построении переходных процессов методом Башкирова.

Если в правой части исходного дифференциального уравнения вместо C будет произвольная функция времени, то выражение (9) будет иметь вид

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t) - x(t)}{T + \frac{\Delta t}{2}}. \quad (9')$$

методом Башкирова

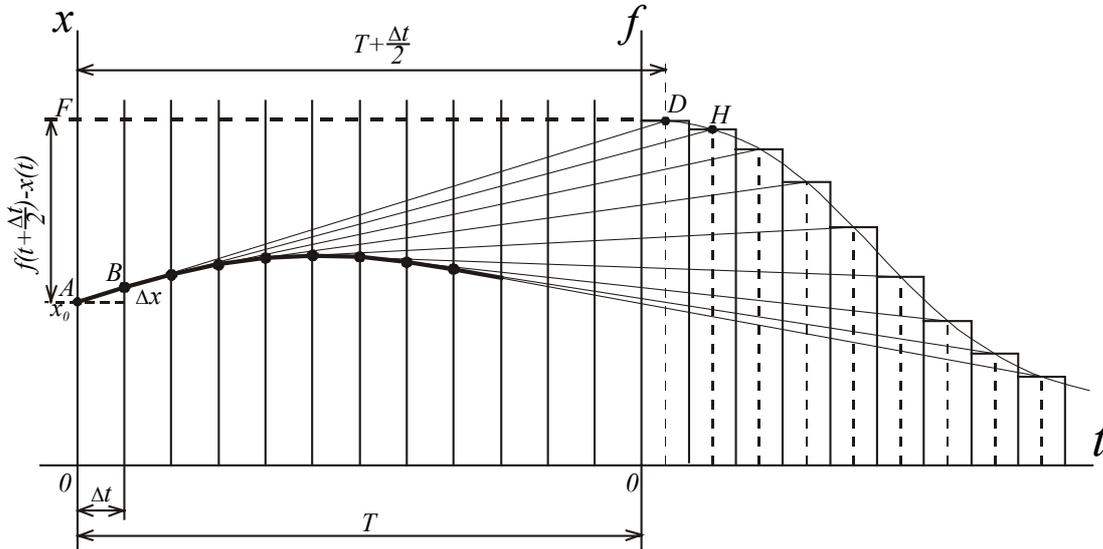
1.

$$T \frac{dx}{dt} + x = f(t). \quad (10)$$

Начальные условия: при $t = 0$, $x(0) = x_0$.

Порядок графического решения:

1. Заданная кривая $f(t)$ сдвигается по оси абсцисс на величину T (рис.171).



2. Кривая $f(t)$ заменяется ступенчатой функцией, так чтобы внутри каждого участка Δt она имела постоянное значение, равное $f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$, тогда для каждого участка имеет место формула

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - x(t)}{T + \frac{\Delta t}{2}}. \quad (11)$$

3. По уравнению (11) производится построение переходного процесса. Известную точку кривой переходного процесса $x(0) = x_0$ соединяем с точкой D . Пересечение этой прямой с Δt является новой точкой $x(\Delta t)$ (точка B) искомого ПП. Действительно, треугольник AFD имеет тот же вид, что и на рис.171 к исходному положению метода. Затем точка B соединяется с точкой H и т.д.
4. Полученные таким образом точки принадлежат (приближенно) искомому ПП. Очевидно, что точность решения возрастает с уменьшением Δt .

2.

$$T \frac{dx}{dt} = f(t) \quad (12)$$

Начальные условия: при $t = 0$, $x(0) = x_0$.

Уравнение (12) приближенно можно переписать, как и ранее.

$$T \frac{\Delta x}{\Delta t} = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{T} \quad (13)$$

Формула (12) является основой для построения переходного процесса дифференциального уравнения (12).

Порядок графического решения:

1. Заданная кривая $f(t)$ смещается по оси абсцисс на величину $T - \frac{\Delta t}{2}$ (рис.172).
2. Кривая $f(t)$ заменяется, как и ранее, ступенчатой функцией.
3. По уравнению (13) производится построение переходного процесса. Известную точку кривой ПП $x(0) = x_0$ соединяем с точкой D , которая получается переносом точки D' кривой $f(\frac{\Delta t}{2})$ на величину x_0 вверх. Точка пересечения прямой с отрезком Δt даст значение $x(\Delta t)$. Затем полученную точку $x(\Delta t)$ (точку B) соединяем прямой с точкой H , которая получается переносом точки H' на известную величину $x(\Delta t)$ и т.д.
4. Поступая аналогично строится полностью кривая ПП для уравнения (12) при любых $f(t)$.

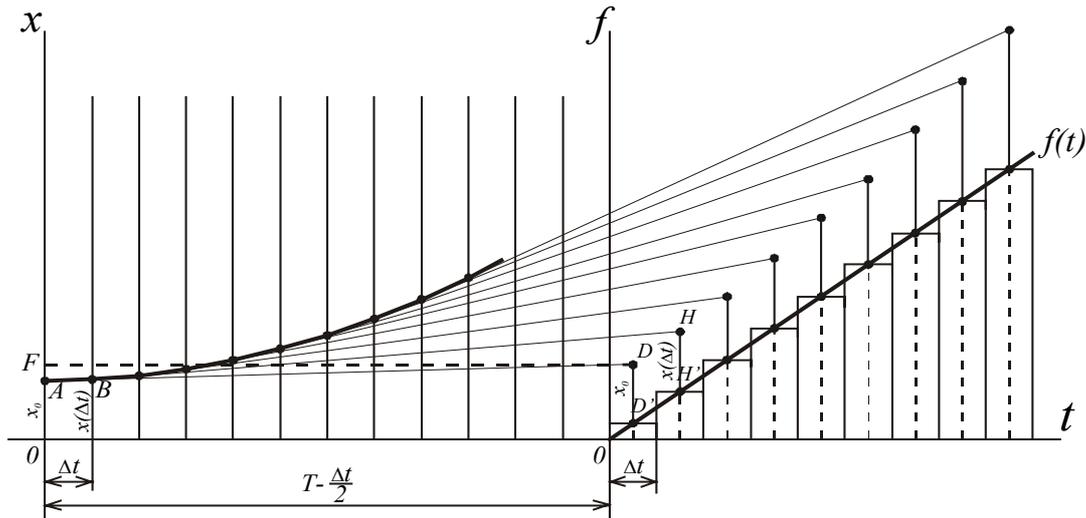


Рис.172

3.

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t). \quad (14)$$

Начальные условия: при $t = 0$, $x(0) = x_0$; $x'(0) = x'_0$.

Преобразуем уравнение (14)

$$\frac{a_0 a_1}{a_1 a_2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2} \frac{dx}{dt} + x = \frac{1}{a_2} f(t),$$

обозначим

$$T_1 = \frac{a_0}{a_1}, T_2 = \frac{a_1}{a_2}, f_1(t) = \frac{1}{a_2} f(t), \quad \text{тогда}$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_2 \frac{dx}{dt} + x = f_1(t). \quad (15)$$

Перепишем (15) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} T_2 \frac{dx}{dt} = x_1, \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = f_1(t) - x. \end{cases} \quad (16)$$

Видно, что уравнения (16) аналогичны ранее рассмотренным примерам 1 и 2.

Порядок графического решения:

Графическое построение вмещает в себя два этапа:

1. По второму уравнению (16) – аналогичное примеру 1.
2. По первому уравнению (16) – аналогичное примеру 2.

1. По второму уравнению (16), аналогично (11) можно записать

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{f_1(t + \frac{\Delta t}{2}) - x(t + \frac{\Delta t}{2}) - x_1(t)}{T_1 + \frac{\Delta t}{2}} \quad (17)$$

2. для первого уравнения (16) имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1(t + \Delta t)}{T_2} \quad (18)$$

3. Кривая $f_1(t)$ заменяется, как и ранее, ступенчатой функцией (рис.173).

4. Оси ординат x_1 и f_1 сдвигаются по оси абсцисс соответственно на величины $T_2 - \frac{\Delta t}{2}$ и $(T_2 - \frac{\Delta t}{2} + T_1)$.

5. По уравнениям (17) и (18) производится построение требуемого переходного процесса.

Известную точку кривой x_1 , определяемой из начальных условий как $x_1(0) = T_2 x'_0$, соединяем прямой с точкой D_1 , которая определяется вычитанием $f_1(t + \frac{\Delta t}{2}) - x(t + \frac{\Delta t}{2})$. (Для начальной точки $f_1(\frac{\Delta t}{2}) - x(\frac{\Delta t}{2})$, где $x(\frac{\Delta t}{2}) = x_0 + x'_0 \frac{\Delta t}{2}$, т.к. Δt принимается малым и можно допустить, что на отрезке Δt функция x изменяется по своей касательной). Пересечение этой прямой с отрезком Δt даст нам точку $B_1 \rightarrow x_1(t)$. Прибавляя к $x_1(\frac{\Delta t}{2})$ отрезок x_0 , получим точку D . Соединяя точку D с точкой $x(0)$ прямой, получим точку B , соответствующего $x(\Delta t)$ и т.д.

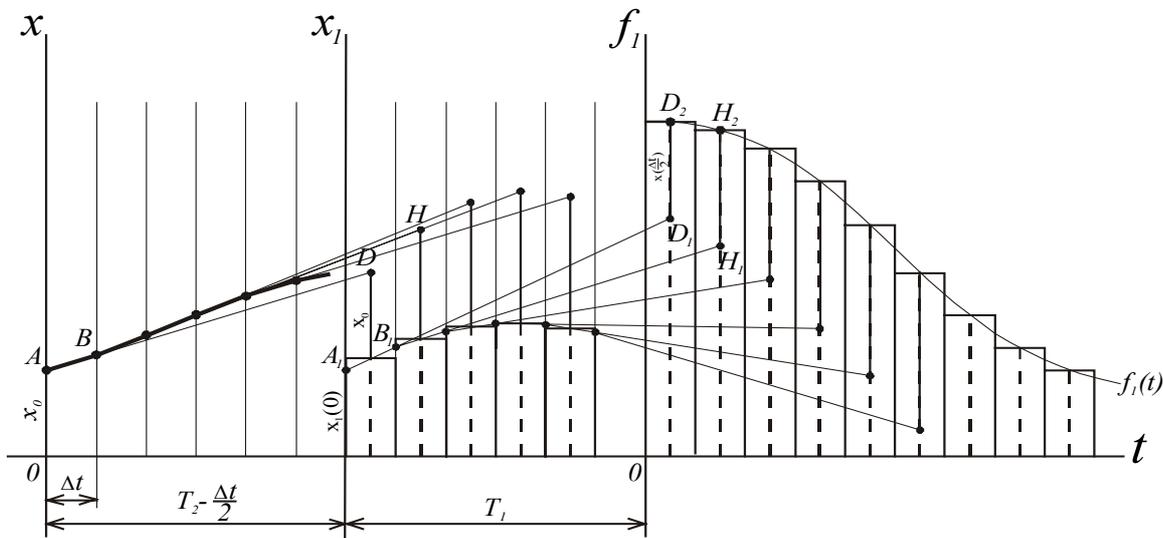


Рис.173

4.

Построение переходного процесса в целом для нелинейной системы вида (рис.174) показано на рис.175:

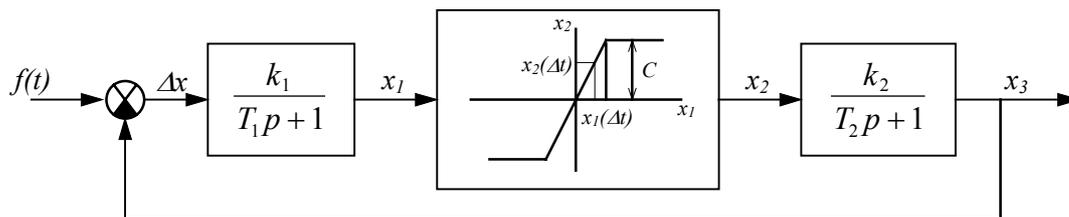


рис.174

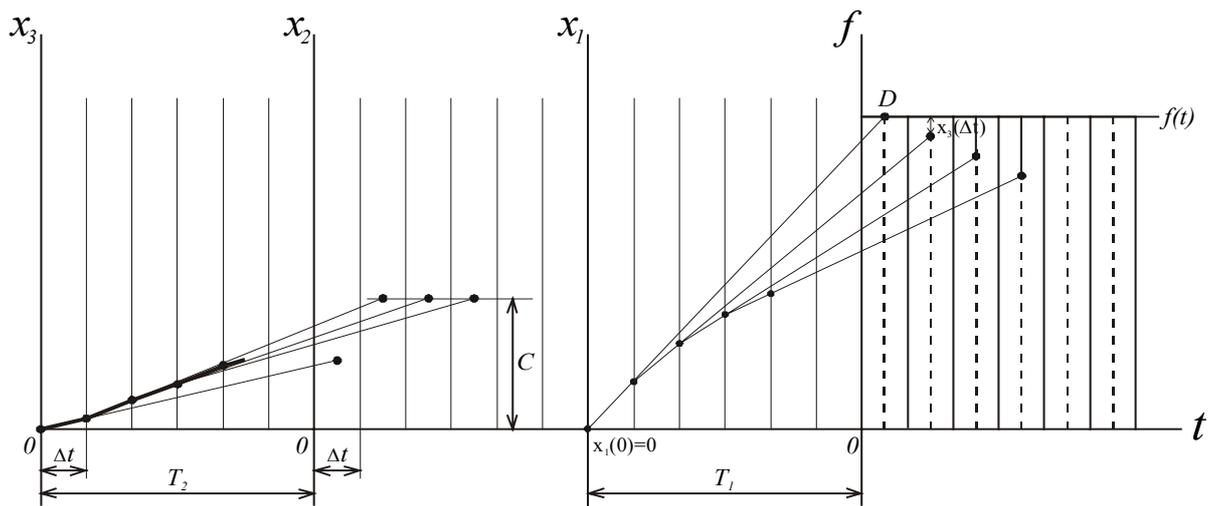


Рис.175

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Определение: Импульсные системы – это такие САУ, в которых имеются сигналы квантованные по времени.

Импульсную САУ можно в общем случае представить блок-схемой:

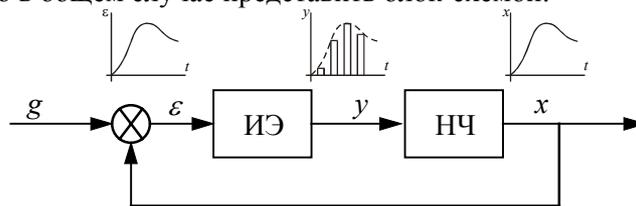


рис. 176

ИЭ – импульсный элемент;

НЧ – непрерывная часть.

Возможны и более сложные импульсные САУ с несколькими ИЭ, однако в лекциях мы рассмотрим лишь САУ с одним ИЭ.

Определение: Квантование, осуществляемое ИЭ в виде преобразования непрерывного сигнала в последовательность импульсов, называется *импульсной модуляцией*.

Существует три вида импульсной модуляции:

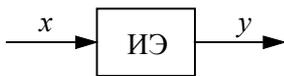
1. амплитудно-импульсная (АИМ);
2. широтно-импульсная (ШИМ);
3. время-импульсная (ВИМ);
 - 3.1. фазо-импульсная (ФИМ);
 - 3.2. частотно-импульсная (ЧИМ).

Сущность каждого вида модуляции поясняется на рис.177

Входной сигнал (его величина) называется моделирующим сигналом ИЭ. Модулируемыми параметрами выходного сигнала ИЭ могут служить высота (амплитуда), ширина и период повторения импульса.

1. АИМ – период повторения $T_{II} = const$, $A = var$ – моделируемый параметр в зависимости от величины x .
2. ШИМ – $A = const$, $T_{II} = var$ – ширина импульса (модулируемый параметр в зависимости от величины x).
- 3.1. ФИМ – $A = const$, $T_3 = var$ – запаздывание импульса относительно начала периода (модулируемый параметр в зависимости от величины x).

3.2. ЧИМ– $A = const, f_{\Pi} = \frac{1}{T_{\Pi}} = var$ – частота следования импульсов (модулируемый параметр в зависимости от величины x).



По виду модуляции импульсные САУ делятся: АИ, ШИ и др. Наибольшее распространение получили АИ САУ, затем ШИ САУ.

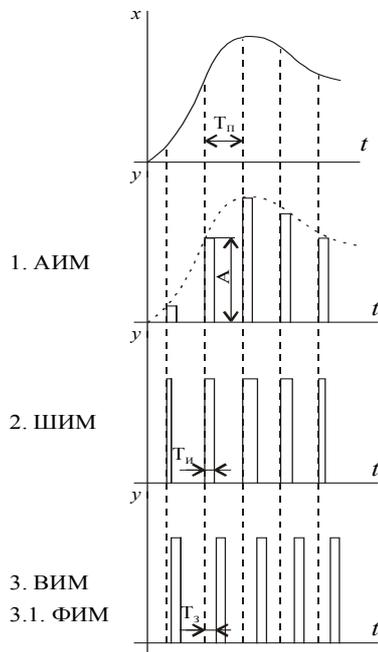


Рис.177

Достоинства импульсных САУ (по сравнению с непрерывными):

1. Возможность многоточечного управления. Оно состоит в том, что с помощью одного управляющего устройства импульсного действия можно управлять несколькими объектами, путем последовательного циклического подключения УУ к каждому из объектов.
2. Возможность многократного использования линий связи. Такое временное разделение каналов широко используется для управления летательными объектами.
3. Повышенная помехозащищенность. Это обусловлено тем, что информация передается в виде коротких импульсов, в промежутке между которыми система оказывается разомкнутой и не реагирует на внешние возмущения.
4. Возможность получения больших коэффициентов усиления по мощности: $K = 10^{10} \div 10^{15}$.

Особенности динамики импульсных САУ

1. Если непрерывная часть системы обладает свойствами фильтра высоких частот, а частота работы импульсного элемента значительно выше полосы пропускания непрерывной части, то импульсная система превращается в систему непрерывного действия.
2. Если частота $f_{\Pi} = \frac{1}{T_{\Pi}}$ работы импульсного элемента недостаточно велика (меньше) по сравнению с полосой пропускания непрерывной части системы, то наличие ИЭ существенно изменяет её динамические свойства по сравнению с системой непрерывного действия. Следовательно при исследовании таких САУ необходимо учитывать дискретный характер сигналов.

Отметим, что импульсные САУ могут быть как линейными, так и нелинейными.

Линейной импульсной САУ называется система, у которой линейными уравнениями описывается как непрерывная часть, так и импульсный элемент.

Математическое описание линейных импульсных систем

Математическое описание импульсной САУ состоит из описания непрерывной части (изученные ранее) и описания импульсного элемента САУ. Для описания ИЭ необходимо знать форму выходных импульсов, статическую характеристику ИЭ и время запаздывания ИЭ, если оно существенно.

Статическая характеристика ИЭ – это зависимость моделируемого параметра выходного сигнала от входного моделирующего сигнала.

Рассмотрим математическое описание линейной импульсной САУ с АИМ. Для описания такой системы необходимо выполнять три вида преобразования исходной структуры:

1. Разлагаем реальный ИЭ на:
 - 1.1. идеальный элемент (ИЭ);

- 1.2. формирующий элемент (ФЭ).
2. Переносим все внешние воздействия на вход ИЭ.
3. Заменяем реальные непрерывные сигналы, действующие в САУ, на фиктивные дискретные сигналы.

Допустим, имеем импульсную САУ вида:

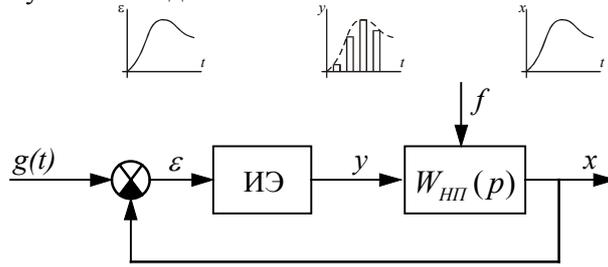


рис. 178

Полагаем $g(t) = 0$.

1. Реальный ИЭ можно представить в виде последовательного соединения идеального ИЭ и формирующего элемента (формирователя).
- 1.1. Идеальный ИЭ – это элемент, на выходе которого имеем импульсы бесконечно малой ширины и бесконечно большой амплитуды, площадь которых конечна и численно равна входному сигналу ИЭ в начале периода повторения. Таким образом, на выходе ИИЭ получаем δ -импульсы, но не единичной, а переменной площади. Будем условно изображать δ -импульсы стрелками, длина которых равна площади соответствующего импульса.

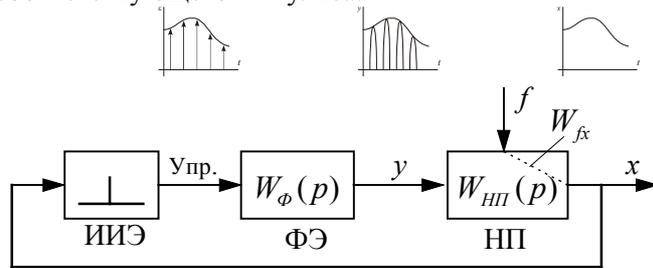


рис. 179

- 1.2. Чтобы найти передаточную функцию ФЭ необходимо определить изображение по Лапласу для формы импульса на выходе реального ИЭ в виде:

$$W_{\Phi}(p) = L[y_{И}(t)], \quad (1)$$

где $y_{И}(t)$ – выражение для импульса единичной высоты на выходе ИЭ.

Рассмотрим пример:

Имеем ИЭ с выходными импульсами прямоугольной формы и ширины τ (рис.180).

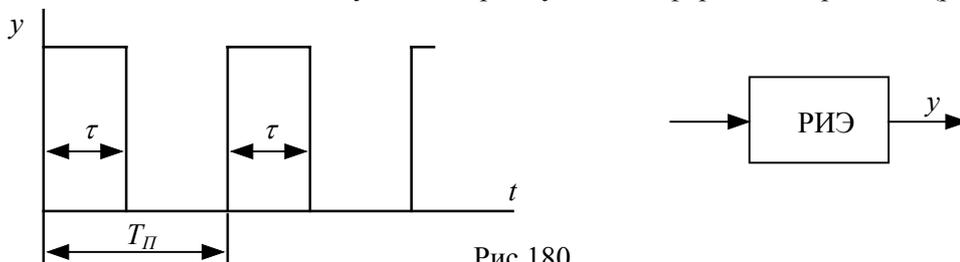


Рис.180

Такой импульс можно представить в виде разности положительной и отрицательной единичных функций, сдвинутых друг относительно друга на время τ (рис.180), т.е.

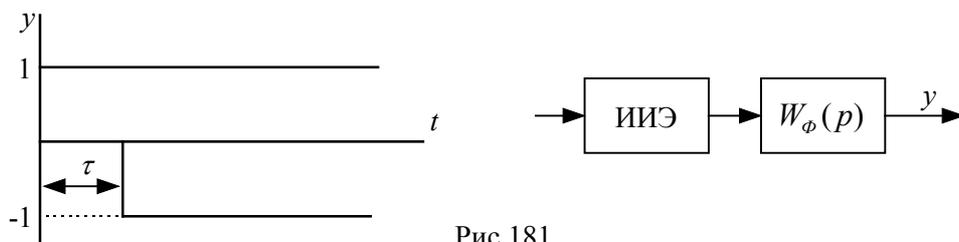


Рис.181

Тогда

$$y_{II}(t) = k_{II} [1(t) - 1(t - \tau)], \quad (2)$$

где k_{II} – коэффициент передачи импульсного элемента;

$$k_{II} = \frac{a}{x},$$

x – величина сигнала на входе импульсного элемента в начале очередного периода повторения T_{II} ; a – высота (амплитуда) выходного импульса в том же периоде.

После преобразования (2) с учетом (1)

$$W_{\Phi}(p) = k_{II} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right) = \frac{k_{II}(1 - e^{-p\tau})}{p}. \quad (3)$$

Структурная схема, соответствующая выражению (3) имеет вид:

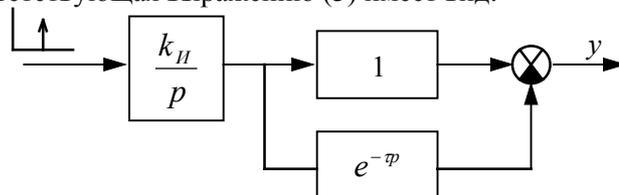


Рис.182

Если в ИЭ необходимо учитывать запаздывание, то последовательно со структурой (рис.182) включается звено чистого запаздывания.

2. Перенос внешнего воздействия на вход ИИЭ осуществляется обычным пересчетом по правилам переноса сигналов непрерывной линейной части САУ.

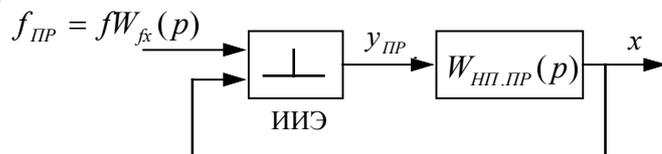


Рис.183

здесь

$$W_{ИИЭ.ПР}(p) = W_{\Phi}(p) \cdot W_{ИИЭ}(p). \quad (4)$$

В результате преобразования 1 и 2 импульсные САУ приводятся к типовой схеме, что позволяет при исследовании пользоваться единым математическим описанием и общей методикой.

3. Заменяем действующие непрерывные сигналы в САУ на фиктивные дискретные. Это значительно упрощает математическое описание импульсных САУ, т.к. используются только разностные уравнения и дискретное преобразование Лапласа.

Если в системе имеем непрерывный сигнал, то заменяем его решетчатой функцией.

Определение: Дискретная функция, значения которой в начале каждого периода, т.е. в моменты времени nT_{II} , где $n = 1, 2, 3, \dots$, совпадают со значениями непрерывной функции, а в остальное время равны нулю, то такая дискретная функция называется *решетчатой функцией*.

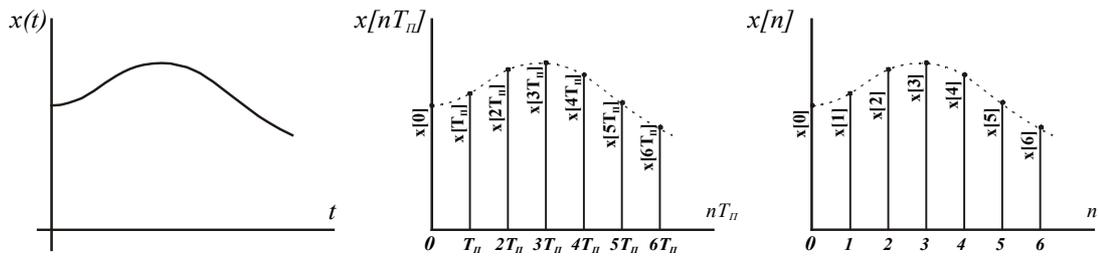
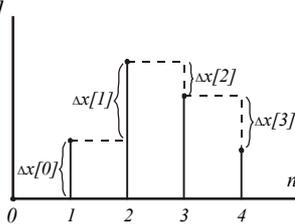


Рис.184

Если решетчатая функция приведена к относительному времени $\bar{t} = \frac{t}{T_{II}}$, т.е. время измеряется числом периодов T_{II} , то в этом случае относительный период $\bar{T}_{II} = 1$ и решетчатая функция обозначается как $x[n]$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Такая запись называется нормированной формой решетчатой функции (рис.184).

Аналогом производных непрерывных функций являются разности решетчатой функции (рис.185). Первая разность (разность первого порядка) характеризует скорость изменения решетчатой функции и представляет собой аналог 1-й производной непрерывной функции

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]. \quad (5)$$



Вторая разность

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] \quad (6)$$

или, с учетом (5)

$$\Delta^2 x[n] = x[n+2] - 2x[n+1] + x[n]. \quad (7)$$

В общем случае разность m -го порядка:

Рис.185

$$\Delta^m x[n] = \Delta^{m-1} x[n+1] - \Delta^{m-1} x[n] = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_i^m x[n+m-i], \quad (8)$$

где $C_i^m = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ – коэффициенты бинома Ньютона.

Аналогом интеграла для решетчатой функции является сумма

$$\sum_{m=0}^{n-1} x[m] = \sum_{m=1}^n x[n-m]. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения для решетчатых функций принимают форму разностных уравнений (уравнений в конечных разностях). В общем виде разностное уравнение можно представить так:

$$a_m x[n+m] + a_{m-1} x[n+m-1] + \dots + a_1 x[n+1] + a_0 x[n] = b_l f[n+l] + b_{l-1} f[n+l-1] + \dots + b_1 f[n-1] + b_0 f[n]. \quad (10)$$

Если коэффициенты a_i ($i = 0, m$) и b_j ($j = 0, l$) постоянны, то линейное неоднородное (с правой частью) разностное уравнение (10) m -го порядка выражает обобщенную координату импульсной системы $x[n]$ через известную функцию $f[n]$.

Если a_i и b_j есть функции времени, то уравнение (10) описывает импульсную систему, параметры которой изменяются во времени.

Если a_i и b_j зависят от координат системы, то уравнение (10) описывает поведение нелинейной импульсной системы.

Если в (10) учесть (8), то получим

$$a_m \Delta^m x[n] + a_{m-1} \Delta^{m-1} x[n] + \dots + a_0 x[n] = b_l \Delta^l f[n] + b_{l-1} \Delta^{l-1} f[n] + \dots + b_0 f[n]. \quad (11)$$

Запишем уравнение (10) в символической форме. Для этого введем оператор, связывающий последующее значение решетчатой функции с предыдущим т.е. $x[n+1]$ с $x[n]$, обозначим такой оператор через ∇ (набла), запишем

$$\nabla x[n] = x[n+1], \quad (12)$$

тогда согласно (5)

$$\Delta x[n] = \nabla x[n] - x[n] = (\nabla - 1)x[n] \quad \text{или} \quad \nabla = 1 + \Delta. \quad (13)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \nabla^2 x[n] &= x[n+2], \\ &\dots\dots\dots \\ \nabla^m x[n] &= x[n+m]. \end{aligned} \quad (14)$$

Оператор ∇ называется оператором сдвига.

Применяя оператор сдвига, уравнение (10) может быть записано в виде:

$$Q(\nabla)x[n] = R(\nabla)f[n], \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q(\nabla) &= a_m \nabla^m + a_{m-1} \nabla^{m-1} + \dots + a_1 \nabla + a_0, \\ R(\nabla) &= b_l \nabla^l + b_{l-1} \nabla^{l-1} + \dots + b_1 \nabla + b_0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Обозначим

$$W(\nabla) = \frac{x[n]}{f[n]} = \frac{R(\nabla)}{Q(\nabla)} \text{ – передаточная функция системы.} \quad (17)$$

С учетом (17) уравнение (15) получает вид:

$$x[n] = W(\nabla)f[n]. \quad (18)$$

Для решения уравнения (18) можно пользоваться методами классической теории разностных уравнений. Однако более проще использовать для решения дискретное преобразование Лапласа.

Дискретное преобразование Лапласа можно получить, если заменить в непрерывном преобразовании интеграл на знак \sum .

$$D\{x[nT_n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_n] e^{-pnT_n} = X^*(p). \quad (19)$$

В относительном времени уравнение (19) имеет вид:

$$D\{x[n]\} = X^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-qn}, \quad (20)$$

где $q = T_n p$ – безразмерная комплексная переменная.

Используем Z -преобразование, для этого введем обозначение

$$z = e^q. \quad (21)$$

Уравнение (20) с учетом (21) принимает вид:

$$Z\{x[n]\} = X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \quad (22)$$

В уравнении (22) дискретное преобразование Лапласа называется Z -преобразованием.

Пример непрерывного и дискретного преобразования некоторых непрерывных функций.

Таблица 5

$x(t)$	$x[n]$	$X(p)$	$X^*(z)$
$\delta(t)$	$\delta[n]$	1	1
$1(t)$	$1[n]$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha n}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha}}$
$\sin \beta t$	$\sin \beta T_n n$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T_n}{z^2 - 2z \cos \beta T_n + 1}$

Основные свойства дискретного преобразования Лапласа

1. Предельные значения решетчатой функции выражены через дискретные изображения следующими соотношениями:

$$1.1. \quad x[0] = \lim_{n \rightarrow 0} x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z); \quad (23)$$

$$1.2. \quad x[\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^*(z). \quad (24)$$

2. Изображение решетчатой функции, смещенной в сторону опережения на m периодов:

$$Z\{x[n+m]\} = Z\{\nabla^m x[n]\} = Z^m X^*(z) = x[0]Z^m - x[1]Z^{m-1} - \dots - x[m-1]Z. \quad (25)$$

3. Изображение решетчатой функции, смещенной в сторону запаздывания на m периодов:

$$Z\{x[n-m]\} = Z^{-m} X^*(z). \quad (26)$$

Отметим, что для получения уравнения импульсной САУ, записанного в дискретном изображении $X^*(z)$ из разностного с оператором ∇ , необходимо поступать так же, как и при переходе от дифференциального уравнения к операторной форме при непрерывных сигналах.

Если импульсная САУ описывается разностным уравнением вида (18): $x[n] = W(\nabla)f[n]$, то в изображениях дискретного преобразования Лапласа:

$$X^*(z) = W^*(z)F^*(z), \quad (27)$$

где $W^*(z) = \frac{X^*(z)}{F^*(z)} = \frac{R^*(z)}{Q^*(z)}$ – дискретная ПФ САУ, которая от выражения (17) отличается простой заменой $\nabla = Z$.

- Определения:
1. Отношение Z -преобразования выходного сигнала системы (звена) к Z -преобразованию входного сигнала системы (звена) при нулевых начальных условиях, называется *дискретной передаточной функцией* системы (звена).
 2. Чтобы перейти к Z -преобразованию от символической формы записи уравнений, необходимо оператор сдвига $\nabla = Z$, получим дискретное преобразование Лапласа.

Итак, чтобы осуществить переход от непрерывного преобразования к дискретному преобразованию Лапласа необходимо:

1. Найти по таблицам по известному изображению непрерывных сигналов его оригинал;
2. Заменить найденную зависимость решетчатой функцией;
3. Найти дискретное преобразование Лапласа для полученных решетчатых функций (по таблицам);
4. Найти дискретные передаточные функции звеньев импульсной САУ.

Для ранее рассмотренной структурной схемы импульсной САУ, получим структурную схему вида:

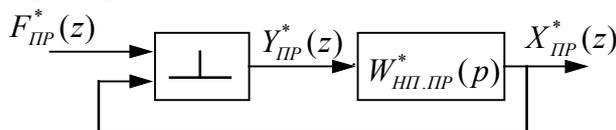


Рис.186

Частотные характеристики линейных импульсных САУ с АИМ

Частотные характеристики импульсных САУ могут быть получены по передаточным функциям или экспериментально.

Если в передаточную функцию подставить

$$q = j\bar{\omega}, \text{ т.е. } z = e^{j\bar{\omega}}, \quad (1)$$

где $\bar{\omega} = T_n \omega$ – относительная частота,

то получим частотную характеристику импульсной САУ.

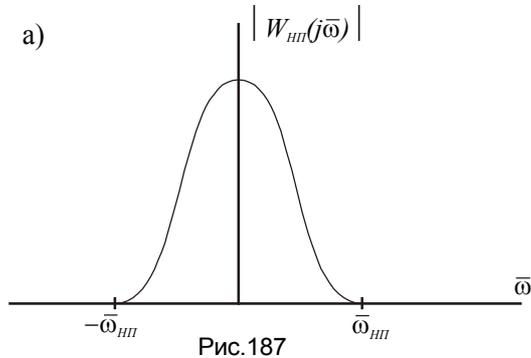
Обозначим

$W_p^*(j\bar{\omega})$ – амплитудо-фазовая частотная характеристика разомкнутой импульсной САУ,

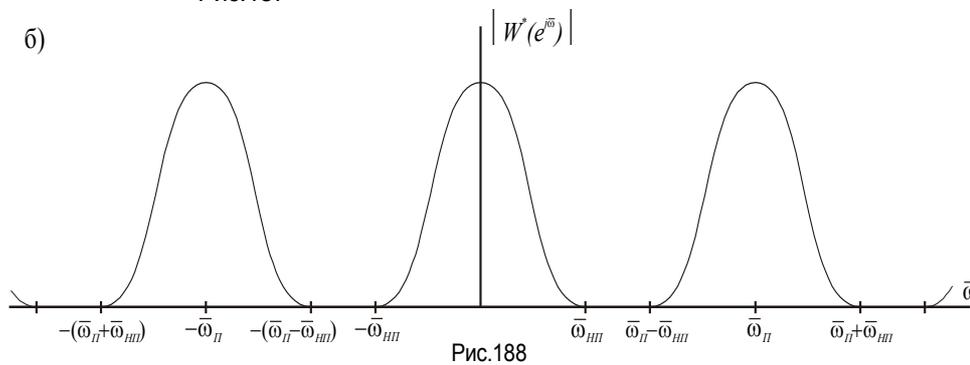
$W_3^*(j\bar{\omega})$ – амплитудо-фазовая частотная характеристика замкнутой импульсной САУ.

Модуль обозначенных комплексных величин представляет соответствующие амплитудные, а аргумент – фазовые частотные характеристики.

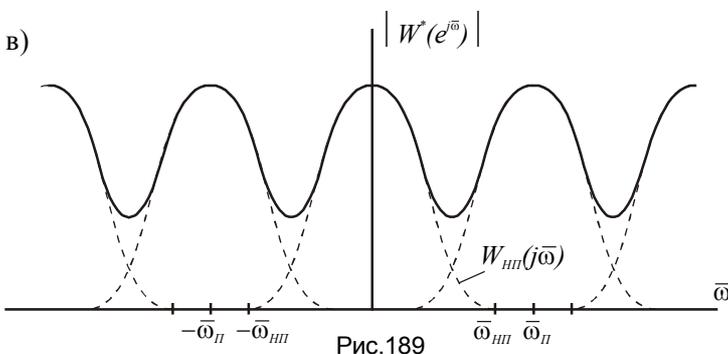
Частотные характеристики импульсных систем представляют собой периодические функции частоты и имеют вид:



– АЧХ непрерывной части САУ.



– АЧХ импульсной САУ с той же непрерывной частью (а) и идеальным ИЭ, где $\bar{\omega}_{\Pi} > 2\bar{\omega}_{HP}$, $\bar{\omega}_{\Pi}$ – частота повторения импульсов; $\bar{\omega}_{HP}$ – полоса пропускания частот непрерывной части САУ.



– АЧХ импульсной САУ с непрерывной частью а) и ИИЭ,

где $\bar{\omega}_{\Pi} < 2\bar{\omega}_{HP}$.

Из рассмотренных графиков видно, что частотные характеристики системы есть бесконечно повторяющаяся ЧХ непрерывной части САУ с частотой повторения импульсов $\bar{\omega}_{\Pi}$.

Периодичность частотных характеристик импульсных систем, а также их симметричность относительно $\bar{\omega} = 0$ означает, что для их полного описания достаточно иметь частотную характеристику в диапазоне изменения частот

$$0 \leq \bar{\omega} \leq \pi \text{ или } 0 \leq \bar{\omega} \leq 0,5\bar{\omega}_{\Pi}. \quad (2)$$

Покажем, при каких соотношениях частот импульсную САУ можно рассчитывать как непрерывную.

Из рассмотрения частотных характеристик импульсных САУ (рисунки 2 и 3) можно записать:

1. если $\bar{\omega}_{\Pi} \geq 2\bar{\omega}_{HP}$, то частотные характеристики непрерывной и импульсной САУ в пределах полосы пропускания полностью совпадают.
2. если $\bar{\omega}_{\Pi} < 2\bar{\omega}_{HP}$, то частотная характеристика непрерывной и импульсной САУ в пределах полосы пропускания частот не совпадают, следовательно, при исследовании такой САУ необходимо пользоваться дискретными передаточными функциями.

Чтобы импульсную систему можно было рассматривать как непрерывную, необходимо ещё накладывать ограничения на частоту приведенного внешнего воздействия в виде:

$$\omega_F \leq \omega_{\text{н}} - \omega_{\text{нп}}. \quad (3)$$

где ω_F – спектр (наибольшая частота) внешнего воздействия, приведенного ко входу импульсного элемента.

Условие (3) показывает на то, что в пределах полосы пропускания $\omega_{\text{нп}}$ не появится искажения частотной характеристики непрерывной части системы от действия внешнего воздействия.

Итак, если будет выполнено условие

$$\left. \begin{aligned} \omega. &\geq 2\omega., \\ \omega_f &\leq \omega. - \omega. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то импульсную САУ можно исследовать как САУ непрерывного действия. Условия (4) – есть теорема Котельникова-Шенона применительно к САУ с АИМ.

Устойчивость импульсных САУ

Если условия (4) для импульсных САУ не выполняются, то она, как уже было сказано, должна исследоваться либо по дискретным передаточным функциям, либо по частотным характеристикам. Отметим, что исследование устойчивости импульсных САУ осуществляется с помощью известных критериев Рауса, Гурвица, Найквиста, Михайлова модифицированных с учетом особенности работы импульсных систем.

Допустим, имеем импульсную САУ вида (рис.190):

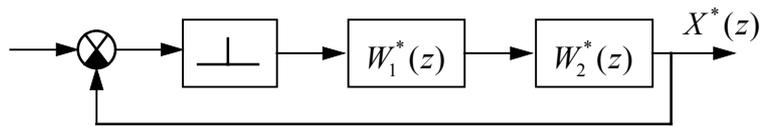


Рис.190

Импульсная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p^*(z) = W_1^*(z) \cdot W_2^*(z). \quad (1)$$

По правилам преобразования структур, передаточная функция замкнутой системы

$$W_3^*(z) = \frac{W_p^*(z)}{1 + W_p^*(z)}. \quad (2)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение импульсной системы

$$1 + W_p^*(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (3)$$

Так как

$$z = e^q = e^{(\bar{\alpha} \pm j\bar{\omega})} = e^{[\bar{\alpha} \pm j(2k\pi + \bar{\omega})]} \quad (\text{свойство частотной характеристики импульсной САУ}) \quad (4)$$

то характеристическое уравнение (3) имеет бесчисленное множество корней.

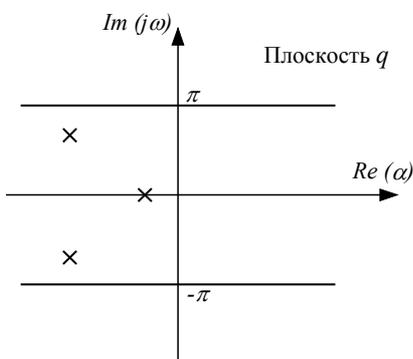


Рис.191

Следовательно, передаточная функция $W_3^*(z) = W_3^*(e^q)$ является также периодической функцией вдоль мнимой оси (оси частот), и поэтому при изучении полюсов этой передаточной функции в комплексной плоскости q достаточно рассмотреть их в полосе от $-\pi$ до $+\pi$ (рис.191).

Чтобы импульсная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все полюсы W_3^* при изменении частоты от $-\pi$ до $+\pi$ лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости q (рис.191).

Если перейти от комплексной плоскости q к плоскости $Z = e^q$, то интересующая нас полоса от $-\pi$ до $+\pi$ отображается в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, т.к. при $q = j\bar{\omega}$ (мнимая ось) модуль $|Z| = |e^{j\bar{\omega}}| = 1$ (рис.192).

Чтобы импульсная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все полюсы W_3^* лежали внутри окружности единичного радиуса в комплексной плоскости Z (рис.192).

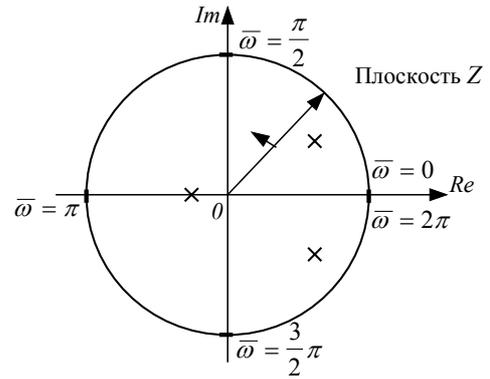


Рис.192

Чтобы применить алгебраические критерии устойчивости к импульсной системе, производят замену переменной, вводя новую переменную r

$$Z = \frac{r+1}{r-1}. \quad (5)$$

Область устойчивости импульсной системы в плоскости новой переменной r соответствует вся левая полуплоскость, а границей устойчивости является вся мнимая ось.

В результате подстановки (5) в характеристическое уравнение импульсной системы (3) получаем условия устойчивости, аналогичные непрерывным системам. Следовательно можно применять и любые критерии устойчивости для непрерывных систем.

Рассмотрим примеры:

1. Имеем характеристическое уравнение первого порядка

$$a_0 z + a_1 = 0. \quad (1п)$$

Подставляя (5) в (1п), получим

$$a_0 \left(\frac{r+1}{r-1} \right) + a_1 = 0.$$

$$\text{или} \quad (a_0 + a_1)r + a_0 - a_1 = 0. \quad (2п)$$

Для устойчивости рассматриваемой системы, из свойств алгебраических критериев устойчивости, можно записать:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > a_1. \quad (3п)$$

2. Имеем характеристическое уравнение второго порядка

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0. \quad (4п)$$

Подставляем (4п) в соотношение (5)

$$a_0 \left(\frac{r+1}{r-1} \right)^2 + a_1 \left(\frac{r+1}{r-1} \right) + a_2 = 0.$$

После преобразования получим

$$(a_0 + a_1 + a_2)r^2 + 2(a_0 - a_2)r + (a_0 - a_1 + a_2) = 0. \quad (5п)$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты (5п) были положительны, т.е.

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0, \\ a_0 - a_2 &> 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (6п)$$

Аналогично получают условия устойчивости для систем более высокого порядка. Однако для порядка выше 3-го значительно возрастают вычислительные трудности.